14-5-19

Παρεμβολή με κυβικές ~~συναρτήσεις~~ Spline

Θεωρούμε τη διαμέριση του $[a,b]$, $X_n = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$
με $a = X_0 < X_1 < \ldots < X_n = b$
Έστω $S(X_n)$ ο χώρος όλων των συναρτήσεων στο $C^2[a,b]$
που είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα $[X_i, X_{i+1}]$
$i=0,1,\ldots,n-1$
Χώρος των κυβικών splines

Θεώρημα: Δοθέντος μιας συνάρτησης $f \in C[a,b]$ και των αριθμών S_0', S_n' τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση Spline τέτοια ώστε:

$$S(f, X_n; X_i) = f(X_i) \quad i=0,1,2,\ldots,n$$

και

$$S'(f, X_n; a) = S_0' \quad , \quad S'(f, X_n; b) = S_n'$$

όπου S_0' η παράγωγος στο a
S_n' η παράγωγος στο b

Απόδειξη: Έστω S_i $i=0,1,2,\ldots,n-1$ οι τιμές της παραγώγου της συνάρτησης Spline στα X_i $i=1,2,\ldots,n-1$

$$S'(X_i) = S'(\qquad) = S_i$$

Θα προσδιορίσουμε τα S_i' απαιτώντας συνέχεια της $S''(X_i)$
$i=1,2,\ldots,n-1$
Θεωρούμε τη συνάρτηση Hermite στο διάστημα $[X_i, X_{i+1}]$
όπου
$S(X_i) = f(X_i)$
$S(X_{i+1}) = f(X_{i+1})$
$S'(X_i) = S_i'$
$S'(X_{i+1}) = S_{i+1}'$

$$S(x) = \left[\frac{(x - x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3} \right] f_i$$

$$+ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} S'_i$$

$$+ \left[\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)}{(\Delta x_i)^3} \right] f_{i+1}$$

$$+ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} S'_{i+1}$$

$$S''(x) = \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{6x - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3} \right] f_i$$

$$+ \frac{6x - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2} S'_i$$

$$+ \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{6x - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3} \right] f_{i+1}$$

$$+ \frac{6x - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2} S'_{i+1}$$

$$S''(x_i) = \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - \frac{8 \Delta x_i}{(\Delta x_i)^3} \right] f_i - \frac{4 \Delta x_i}{(\Delta x_i)^2} S'_i$$

$$+ \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{4 \Delta x_i}{(\Delta x_i)^3} \right] f_{i+1} - \frac{2 \Delta x_i}{(\Delta x_i)^2} S'_{i+1}$$

$$\xLeftrightarrow[\frac{\Delta X_{i-1}\Delta X_i}{2}]{\text{πολ/ζω με}} 3\frac{\Delta X_{i-1}}{\Delta X_i}\Delta f_i - 2\Delta X_{i-1}S_i' - \Delta X_{i-1}S_{i+1}'$$

$$= -3\frac{\Delta X_i}{\Delta X_{i-1}}\Delta f_{i-1} + \Delta X_i S_{i-1}' + 2\Delta X_i S_i'$$

$$\Leftrightarrow \Delta X_i S_{i-1}' + 2(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)S_i' + \Delta X_{i-1}S_{i+1}'$$

$$= 3\left[\frac{\Delta X_i}{\Delta X_{i-1}}\Delta f_{i-1} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Delta X_i}\Delta f_i\right] \quad i=1,2,\dots,n$$

$\Leftrightarrow$ $n-1$ εξισώσεις με $n-1$ αγνώστους. Γραμμικό σύστημα $Au=q$

$$A = \begin{bmatrix} 2(\Delta X_0+\Delta X_1) & \Delta X_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta X_2 & 2(\Delta X_1+\Delta X_2) & \Delta X_1 & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ & & & \Delta X_{n-1} & 2(\Delta X_{n-2}+\Delta X_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} S_1' \\ S_2' \\ \vdots \\ S_{n-1}' \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 3\left[\frac{\Delta X_1}{\Delta X_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta X_0}{\Delta X_1}\Delta f_1\right] - \Delta X_2 f'(a) \\ 3\left[\frac{\Delta X_2}{\Delta X_1}\Delta f_1 + \frac{\Delta X_1}{\Delta X_2}\Delta f_2\right] \\ \vdots \\ 3\left[\frac{\Delta X_{n-1}}{\Delta X_{n-2}}\Delta f_{n-2} + \frac{\Delta X_{n-2}}{\Delta X_{n-1}}\Delta f_{n-1}\right] - \Delta X_{n-2} f'(b) \end{bmatrix}$$

$$S''(x_i) = -\frac{6}{(\Delta x_i)^2} f_i - \frac{4}{\Delta x_i} s_i' + \frac{6}{(\Delta x_i)^2} f_{i+1} - \frac{2}{(\Delta x_i)} s_{i+1}'$$

$$\boxed{S''(x_i) = \frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i - \frac{4}{\Delta x_i} s_i' - \frac{2}{\Delta x_i} s_{i+1}'}$$

$$S''(x_{i+1}) = \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{4\Delta x_i}{(\Delta x_i)^2}\right] f_i + \frac{2\Delta x_i}{(\Delta x_i)^2} s_i'$$

$$+ \left[\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - \frac{8\Delta x_i}{(\Delta x_i)^3}\right] f_{i+1} + \frac{4\Delta x_i}{(\Delta x_i)^2} s_{i+1}'$$

$$\boxed{S''(x_{i+1}) = -\frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i + \frac{2}{\Delta x_i} s_i' + \frac{4}{\Delta x_i} s_{i+1}'}$$

Στο $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\boxed{S''(x_i) = -\frac{6}{(\Delta x_{i-1})^2} \Delta f_{i-1} + \frac{2}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1}' + \frac{4}{\Delta x_{i-1}} s_i'}$$

Πρέπει

$$\boxed{S''(x_i)\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} = S''(x_i)\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}} \iff$$

$$\frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i - \frac{4}{\Delta x_i} s_i' - \frac{2}{\Delta x_i} s_{i+1}' = -\frac{6}{(\Delta x_{i-1})^2} \Delta f_{i-1} + \frac{2}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1}'$$

$$+ \frac{4}{\Delta x_i} s_i'$$

Άρα επιλύαμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0+\Delta x_1) & \Delta x_0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1+\Delta x_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1' \\ s_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\left[\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1\right] - \Delta x_1 f'(a) \\ 3\left[\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\Delta f_2\right] - \Delta x_1 f'(b) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1' \\ s_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 6 & 1 & 21 \\ \frac{1}{6} & 1 & 6 & 21 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 21 \\ 0 & \frac{35}{6} & \frac{35}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{35}{6} s_2' = \frac{35}{2} \Rightarrow s_2' = 3$$

$$s_1' = 3$$

Άρα $\boxed{u = [3, 3]'}$

Στο $[-2, -1]$:

$$s(x) = \left[\frac{(x+1)^2}{2^2} + 2\frac{(x+2)(x+1)^2}{1^3}\right](-2)$$

$$+ \frac{(x+2)(x+1)^2}{1^2} 12$$

$$+ \left[\frac{(x+2)^2}{1} - 2\frac{(x+1)(x+2)^2}{1^3}\right](-1)$$

$$+ \frac{(x+1)(x+2)^3}{1^2} 3 = x^3$$

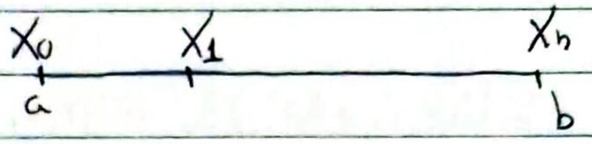
Σχόλιο: Η διάσταση του χώρου $S(X_n)$: n διαστήματα επί 4 η διάσταση του P_3, $4n$ έκτος από $3(n-1)$ δια τη συνέχεια της συνάρτησης της παραγώγου και της δευτέρης παραγώγου στους $n-1$ κόμβους

$$\Rightarrow 4n - 3(n-1) = n+3$$

Ο A είναι τριδιαγώνιος, μη αρνητικός, αυστηρά διαγώνια υπέρτερος
Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ υπάρχει μοναδική λύση

Παρατήρηση

Αν $n=2$:



$$2(\Delta X_0+\Delta X_1) S_1' = 3\left[\frac{\Delta X_1}{\Delta X_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta X_0}{\Delta X_1}\Delta f_1\right] - \Delta X_1 f'(a) - \Delta X_0 f'(b)$$

Άσκηση 4 σελ

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline που προσεγγίζει την f

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-2	-1	1	2
f_i	-8	-1	1	8

και $f'(-2)=12$ $f'(2)=12$

Λύση:

$\Delta X_0 = -1-(-2) = 1$

$\Delta X_1 = 1-(-1) = 2$

$\Delta X_2 = 2-1 = 1$

$\Delta f_0 = -1-(-8) = 7$

$\Delta f_1 = 2$

$\Delta f_2 = 7$

Στο $[-1,1]$:

$$S(x) = \left[\frac{(x-1)^2}{2^2} + 2\,\frac{(x+1)(x-1)^2}{2^3} \right](-1)$$

$$+ \frac{(x+1)(x-1)^2}{2^2}\cdot 3$$

$$+ \left[\frac{(x+1)^2}{2^2} - 2\,\frac{(x-1)(x+1)^2}{2^3} \right] 1$$

$$+ \frac{(x-1)(x+1)^2}{2^2}\cdot 3 = \dots = x^3$$

Στο $[1,2]$

$$S(x) = \left[(x-2)^2 + 2(x-1)(x-2)^2 \right]\cdot 1$$

$$+ (x-1)(x-2)^2\cdot 3$$

$$+ \left[(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)^2 \right]\cdot 8$$

$$+ (x-2)(x-1)^2\cdot 12 = \dots = x^3$$